第 2 节 等差、等比数列的基本性质（★★）

强化训练

类型Ⅰ：等差数列的性质应用

1．（2022·宁波模拟·★）已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为等差数列，且$a_3+b_5=4$，$a_5+b_9=8$，则$a_4+b_7=$（　　）

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8

答案：B

解析：注意到$a_3+a_5=2a_4$，$b_5+b_9=2b_7$，故要求a_4+b_7，将所给两式相加即可，

$$\begin{cases}a_3+b_5=4\\a_5+b_9=8\end{cases}\Rightarrow(a_3+b_5)+(a_5+b_9)=(a_3+a_5)+(b_5+b_9)$$

$=2a_4+2b_7=12\Rightarrow a_4+b_7=6.$

2．（2022·重庆模拟·★★）中国古代数学著作《九章算术》中有如下问题："今有金箠，长五尺，斩本一尺，重四斤，斩末一尺，重二斤. 问次一尺各重几何"？意思是："现有一根金锤，长五尺，一头粗一头细. 在粗的一端截下一尺，重四斤；在细的一端截下一尺，重二斤. 问依次每一尺各重几斤"？根据已知条件，若金锤由粗到细是均匀变化的，则中间三尺的重量为（　　）

（A）3 斤　（B）6 斤　（C）9 斤　（D）12 斤

答案：C

解析：设从粗到细的五尺的重量分别为a_1，a_2，…，a_5，则$\{a_n\}(n=1,2,\cdots,5)$为等差数列，

由题意，$a_1=4$，$a_5=2$，要求的是$a_2+a_3+a_4$，可用下标和性质转换成$3a_3$，于是先算a_3，

所以$a_1+a_5=2a_3=6$，从而$a_3=3$，故$a_2+a_3+a_4=3a_3=9$.

3．（2022·宿迁模拟·★★★）若两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为A_n，B_n，且$\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{2n+1}{3n-2}$，则$\dfrac{a_5+a_{13}}{b_3+b_{15}}$的值为_____.

答案：$\dfrac{5}{7}$

解析：给出A_n和B_n的比值，可利用$A_{2n-1}=(2n-1)a_n$，$B_{2n-1}=(2n-1)b_n$转换成a_n与b_n的比值，

由题意，$\dfrac{a_5+a_{13}}{b_3+b_{15}}=\dfrac{2a_9}{2b_9}=\dfrac{a_9}{b_9}$，又$\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{2n+1}{3n-2}$，

所以$\dfrac{A_{17}}{B_{17}}=\dfrac{17a_9}{17b_9}=\dfrac{a_9}{b_9}=\dfrac{2\times17+1}{3\times17-2}=\dfrac{5}{7}$.

4．（2022·重庆模拟·★★）已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若$S_3=15$，$S_9=75$，则$S_6=$（　　）

（A）40　（B）45　（C）50　（D）55

答案：A

解析：观察发现 S_3， S_9， S_6 的下标都是 3 的倍数，于是想到等差数列的片段和性质，

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 S_3， S_6-S_3， S_9-S_6 成等差数列，故 $2(S_6-S_3)=S_3+(S_9-S_6)$，

将 $\begin{cases}S_3=15\\S_9=75\end{cases}$ 代入可得 $2(S_6-15)=15+(75-S_6)$，故 $S_6=40$.

5.（★★★）等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{4}$，则 $\dfrac{S_{15}}{S_9}=$______.

答案：$\dfrac{25}{9}$

解析：观察发现 S_3， S_6， S_9， S_{15} 的下标都是 3 的倍数，于是联想到等差数列的片段和性质，

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 S_3， S_6-S_3， S_9-S_6， $S_{12}-S_9$， $S_{15}-S_{12}$ 成等差数列，设其公差为 d，

因为 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{4}$，所以可设 $S_3=m(m\neq 0)$，则 $S_6=4m$，

所以 $S_6-S_3=3m$，故 $d=(S_6-S_3)-S_3=2m$，

接下来可分别计算 S_9 和 S_{15}，再算 $\dfrac{S_{15}}{S_9}$，

$S_9=(S_9-S_6)+(S_6-S_3)+S_3$

$=(S_3+2d)+(S_3+d)+S_3=3S_3+3d=9m$，

$S_{15}=(S_{15}-S_{12})+(S_{12}-S_9)+S_9=(S_3+4d)+(S_3+3d)+S_9$

$=2S_3+7d+S_9=2m+7\times 2m+9m=25m$，所以 $\dfrac{S_{15}}{S_9}=\dfrac{25m}{9m}=\dfrac{25}{9}$.

6.（2022•海安模拟•★★★）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}=110$，$S_{110}=10$，则 $S_{120}=$（　　）

（A）-10　　（B）-20　　（C）-120　　（D）-110

答案：C

解法 1：可将已知条件用 a_1 和 d 来翻译，求出 a_1 和 d，再算 S_{120}，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases}S_{10}=10a_1+45d=110\\S_{110}=110a_1+5995d=10\end{cases}$，

解得：$a_1=\dfrac{659}{55}$，$d=-\dfrac{12}{55}$，

所以 $S_{120}=120a_1+\dfrac{120\times 119}{2}d=120\times\dfrac{659}{55}+60\times 119\times(-\dfrac{12}{55})=-120$.

解法 2：条件涉及 S_n 且下标都是 10 的倍数，一般会考虑用片段和性质，但这里 S_{10}， S_{110}， S_{120} 下标距离较远，不易操作. 注意到给出的两个条件都与 S_n 有关，于是可考虑用性质“$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列”来处理，

由题意，$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，设其公差为 d'，

$$\begin{cases} S_{10}=110 \\ S_{110}=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{S_{10}}{10}=11 \\ \dfrac{S_{110}}{110}=\dfrac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{110}}{110}-\frac{S_{10}}{10}=100d'=\frac{1}{11}-11=-\frac{120}{11},$$

解得：$d'=-\dfrac{6}{55}$，故 $\dfrac{S_{120}}{120}=\dfrac{S_{10}}{10}+110d'$

$=11+110\times(-\dfrac{6}{55})=-1$，所以 $S_{120}=-120$.

类型Ⅱ：等比数列的性质应用

7．（2022·绵阳模拟·★★）已知等比数列$\{a_n\}$满足$\log_2 a_2+\log_2 a_{11}=1$，且$a_5a_6a_8a_9=16$，则数列$\{a_n\}$的公比为（　　）

（A）2　（B）4　（C）±2　（D）±4

答案：A

解析：$\log_2 a_2+\log_2 a_{11}=1\Rightarrow\log_2(a_2a_{11})=1\Rightarrow a_2a_{11}=2$，

$a_5a_6a_8a_9=(a_6a_8)^2=16\Rightarrow a_6a_8=\pm4$，

±4都可取吗？由于$a_6a_8=a_6a_6q^2=a_6^2q^2>0$，故只能取正，

所以$a_6a_8=4$，故$\dfrac{a_6a_8}{a_2a_{11}}=\dfrac{a_1q^5\cdot a_1q^7}{a_1q\cdot a_1q^{10}}=q=2$.

【反思】在等比数列$\{a_n\}$中，$a_{2n-1}=a_1\cdot q^{2n-2}$，注意到$q^{2n-2}>0$，所以$a_{2n-1}$与$a_1$同号，故$\{a_n\}$中所有奇数项符号相同；同理，$a_{2n}=a_2\cdot q^{2n-2}$，所以$\{a_n\}$中所有偶数项也同号.

8．（2023·黑龙江鹤岗模拟·★★）各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_6^2+a_5a_9+a_8^2=25$，则a_1a_{13}的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{25}{3}$　（B）$\dfrac{25}{4}$　（C）$\dfrac{25}{2}$　（D）5

答案：A

解析：条件中的a_6与a_8，a_5与a_9，以及目标a_1a_{13}的下标和均为14，先用下标和性质统一成a_6和a_8，减少变量个数，

由题意，$a_6^2+a_5a_9+a_8^2=a_6^2+a_6a_8+a_8^2=25$ ①，

而$a_1a_{13}=a_6a_8$，故只需求a_6a_8的最大值，对式①用不等式$a^2+b^2\ge2ab$即可将结构统一成a_6a_8，

由①可得$25=a_6^2+a_6a_8+a_8^2\ge2a_6a_8+a_6a_8=3a_6a_8$，

所以$a_6a_8\le\dfrac{25}{3}$，当且仅当$a_6=a_8=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$时取等号，

又$a_1a_{13}=a_6a_8$，所以a_1a_{13}的最大值为$\dfrac{25}{3}$.

9．（2022·江西模拟·★★）已知S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=6$，$S_8=18$，则$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=$（　　）

（A）96　（B）162　（C）243　（D）486

答案：A

解析：$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=S_{20}-S_{16}$，注意到 S_{20}，S_{16}，S_4，S_8 下标都是 4 的倍数，故想到片段和性质，

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，且其公比 $q\neq -1$，否则 $S_4=S_8=0$，与题意不符，

所以 S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$，$S_{16}-S_{12}$，$S_{20}-S_{16}$ 成等比数列，设其公比为 p，则 $p=\dfrac{S_8-S_4}{S_4}=\dfrac{18-6}{6}=2$，

故 $a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=S_{20}-S_{16}=S_4\cdot p^4=6\times 2^4=96$.

10.（2023 • 新高考Ⅱ卷 • ★★★）记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$（　　）

（A）120　（B）85　（C）-85　（D）-120

答案：C

解析：观察发现 S_2，S_4，S_6，S_8 的下标都是 2 的整数倍，故可考虑片段和性质，先看 q 是否为 -1，

若 $\{a_n\}$ 的公比 $q=-1$，则 $S_4=\dfrac{a_1[1-(-1)^4]}{1-(-1)}=0$，

与题意不符，所以 $q\neq -1$，

故 S_2，S_4-S_2，S_6-S_4，S_8-S_6 成等比数列 ①，

条件中有 $S_6=21S_2$，不妨由此设个未知数，

设 $S_2=m$，则 $S_6=21m$，所以 $S_4-S_2=-5-m$，

$S_6-S_4=21m+5$，由①可得 $(S_4-S_2)^2=S_2(S_6-S_4)$，

所以 $(-5-m)^2=m(21m+5)$，解得：$m=-1$ 或 $\dfrac{5}{4}$，

若 $m=-1$，则 $S_2=-1$，$S_4-S_2=-4$，$S_6-S_4=-16$，

所以 $S_8-S_6=-64$，故 $S_8=S_6-64=21m-64=-85$；

到此结合选项已可确定选 C，另一种情况我们也算一下，

若 $m=\dfrac{5}{4}$，则 $S_2=\dfrac{5}{4}>0$，而 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4$

$=a_1+a_2+a_1q^2+a_2q^2=(a_1+a_2)(1+q^2)=S_2(1+q^2)$，

所以 S_4 与 S_2 同号，故 $S_4>0$，与题意不符；

综上所述，m 只能取 -1，此时 $S_8=-85$.